**Modelos de Redes**

Hay una multitud de situaciones, en investigación de operaciones, que se pueden modelar y resolver como redes (nodos conectados por ramas). Algunas encuestas recientes informan que hasta el 70% de los problemas de programación matemática en el mundo real se pueden representar como modelos relacionados con redes.

**Red**

Una red consiste en una serie de nodos enlazados con arcos (o ramas). La notación para describir una red es (N, A), donde N es el conjunto de nodos y A es el conjunto de arcos.

**Métodos de CPM y PERT**

Los métodos CPM (método de la ruta crítica o del camino crítico) y PERT (técnica de evaluación y revisión de programa) se basan en redes, y tienen por objeto auxiliar en la planeación, programación y control de proyectos, analizando las tareas o actividades involucradas en completar dicho proyecto.

Existen modelos de redes que pueden ser empleados para programar proyectos que comprenden un gran número de actividades. Si la duración de cada actividad es conocida con certeza, el CPM puede ser empleado para determinar cuál es el tiempo requerido para completar el proyecto. El método CPM también permite identificar cuáles actividades pueden ser atrasadas sin afectar la duración total del proyecto.

Si la duración de las actividades no es conocida con certeza, el PERT puede ser empleado para determinar la probabilidad de que un proyecto termine antes de un período definido.

Las dos técnicas, CPM y PERT, que se desarrollaron en forma independiente, difieren en que en el CPM se supone duraciones determinísticas de actividad, mientras que en PERT se suponen duraciones probabilísticas. Esta presentación comenzará con el CPM y después se presentarán los detalles del PERT

**Importancia del Análisis de Redes**

Las principales ventajas de saber analizar la red que conforma un proyecto es que estas nos pueden proporcionar información de gran importancia como qué trabajos serán necesarios primero y cuando se deben realizar, qué trabajos hay y cuántos serán requeridos en cada momento, cuál es la situación del proyecto que está en marcha en relación con la fecha programada para su terminación, cuáles son las actividades críticas que al retrasarse cualquiera de ellas retrasarían la duración del proyecto, dónde se puede reforzar la marcha para contrarrestar la demora del proyecto y qué costo produce, cuál es la planificación y programación de un proyecto, entre otros.

**Definición de actividades y relaciones de precedencia**

* ACTIVIDAD: Es un trabajo que se debe llevar a cabo como parte de un proyecto, es simbolizado mediante una rama o recta de la red.
* LISTA DE ACTIVIDADES: Es una lista cuidadosa y ordenada donde se recopila todas las diferentes actividades que intervienen en la realización de un proyecto.
* NODO: Son los círculos numerados que forman parte del diagrama de red y representan el principio y el fin de las actividades que intervienen en el proyecto.
* RAMA: Son las flechas que forman parte del diagrama de red y significan las actividades en el proyecto.
* EVENTO: Se dice que se realiza un evento, cuando todas las actividades que llegan a un mismo nodo han sido terminadas.
* RED DE ACTIVIDADES: Es una representación de dos aspectos muy particulares de cualquier proyecto, que son:

1. Una relación de precedencia entre las diferentes actividades del proyecto.
2. La duración de cada actividad.

* PRECEDENCIA: Es una actividad que debe preceder (estar antes) inmediatamente a una actividad dada en un proyecto, también nombradas prioridades inmediatas.
* ACTIVIDAD FICTICIA: Actividades imaginarias que existen dentro del diagrama de red, solo con el propósito de establecer las relaciones de precedencia y no se les asigna tiempo alguno, es decir, que la actividad ficticia permite dibujar redes con las relaciones de precedencia apropiadas, se representa por medio de una línea punteada.
* LETRAS Y NÚMEROS: Las letras sirven para identificar las rutas y las actividades y los números sirven para facilitar la localización de las actividades reales y se asigna a todos los nodos.
* NODO INICIAL: De él deben partir todas las actividades que no tienen precedente.
* PRECEDENCIAS LINEALES: Corresponden a los casos en los que hay una única actividad que precede y una única actividad que procede.
* PRECEDENCIAS DE DIVERGENCIA: Corresponden a los casos en los que hay una actividad que precede y varias actividades que proceden.
* PRECEDENCIAS DE CONVERGENCIA: Corresponden a los casos en los que hay varias actividades que preceden y una única actividad que procede.

**Representación en Red**

Una red PERT-CPM permite planificar y controlar el desarrollo de un proyecto.Para aplicar este método se requiere conocer la lista de actividades que incluye un proyecto. Se considera que el proyecto está terminado cuando todas las actividades han sido completadas. Para cada actividad, puede existir un conjunto de actividades predecesoras que deben ser completadas antes de que comience la nueva actividad. Se construye una malla o red del proyecto para graficar las relaciones de precedencia entre las actividades. En dicha representación gráfica, cada actividad es representada como una flecha y cada nodo ilustra la culminación de una o más actividades.

Los pasos para la construcción de una red PERT – CPM son los siguientes:

1. **Definir el proyecto y sus respectivas actividades.**

Tenemos que hacer una lista de todas las tareas o actividades que son necesarias para poder llevar el proyecto a buen término. En este punto, no es necesario que las tareas estén ordenadas cronológicamente. Simplemente se trata de hacer una lista de tareas lo más completa posible. Es fundamental que no se deje ninguna actividad fuera.

1. **Desarrollar las relaciones entre las actividades en una tabla de precedencias.**

Para cada actividad, se trata de establecer qué actividades deben precederla. Es decir, se debe tomar la lista de actividades, que posiblemente estará desordenada, y se ordenaran dichas actividades según una relación de precedencia. En la tabla, se debe indicar en la columna de la izquierda cada una de las actividades y, en la columna de la derecha, las tareas que la preceden, es decir: aquellas tareas que necesariamente tenemos que haber terminado antes de poder empezar cada tarea

Cada actividad del proyecto se representa con un arco que apunta en la dirección de avance del proyecto. Los nodos de la red establecen las relaciones de precedencia entre las diferentes actividades del proyecto.

Para configurar la red se dispone de dos reglas:

**Regla 1.** *Cada actividad se representa con un arco, y uno sólo.*

**Regla 2.** *Cada actividad se debe identificar con dos nodos distintos*.

La figura 6.51 muestra cómo se puede usar una actividad ficticia para representar dos actividades concurrentes, *A* y *B*. Por definición, la actividad ficticia, que normalmente se representa con un arco de línea interrumpida, no consume tiempo o recursos. La inserción de una actividad ficticia en una de las cuatro formas que se ven en la figura 6.51, mantiene la concurrencia de *A* y *B*, y también proporciona nodos finales únicos para las dos actividades (para satisfacer la regla 2).

**Regla 3.** *Para mantener las relaciones de precedencia correctas, se deben contestar las siguientes preguntas cuando se agrega a la red cada actividad:*

**a)** *¿Qué actividades deben anteceder inmediatamente a la actividad actual?*

**b)** *¿Qué actividades deben seguir inmediatamente a la actividad actual?*

**c)** *¿Qué actividades deben efectuarse en forma concurrente o simultánea con laactividad actual?*

FIGURA 6.51



Uso de una actividad ficticia para tener representación única de las actividades concurrentes *A* y *B*

Para contestar estas preguntas se podrá necesitar el uso de actividades ficticias, para asegurar las precedencias correctas entre las actividades. Por ejemplo, considere al siguiente segmento de un proyecto:

**1.** La actividad *C* comienza de inmediato después de haber terminado *A* y *B*.

**2.** La actividad *E* se inicia después de que sólo terminó la actividad *B*.

La parte (a) de la figura 6.52 muestra la representación incorrecta de esta relación de precedencia, porque pide que *A* y *B* terminen antes de poder iniciar *E*. En la parte *B* se corrige la situación con el uso de la actividad ficticia.



FIGURA 6.52

Uso de una actividad ficticia para asegurar una relación de precedencia correcta

**Método de CPM**

Se dice que una actividad es **crítica** si no hay margen en la determinación de sus tiempos de inicio y de término. Una actividad **no crítica** permite alguna holgura en su programación, de modo que el tiempo de inicio de la actividad se puede adelantar o retrasar dentro de ciertos límites, sin afectar la fecha de terminación de todo el proyecto.

Para efectuar los cálculos necesarios, se define un **evento** como un momento en el tiempo en el que se terminan actividades y otras se inician. En términos de redes, un evento corresponde a un nodo.

Los cálculos de ruta crítica implican dos pasos: el **paso hacia adelante** determina los tiempos más *tempranos* o de ocurrencia de los eventos, y el **paso hacia atrás** calcula sus tiempos más tardíos de ocurrencia. **Paso hacia adelante (tiempos más tempranos de ocurrencia o tiempos más próximos, deocurrencia,** n**).** Los cálculos se inician en el nodo 1 y avanzan en forma recursiva hasta el nodo final *n*.

**Métodos de revisión.**

**Método de revisión hacia adelante:**

El método de Ruta Crítica con revisión hacia adelante trabaja iniciando con el nodo inicial avanzando hacia el nodo terminal. Determina la duración de cierto proyecto y cuál sería el tiempo cercano de iniciación y de terminación. Se trabajan con los siguientes pasos:

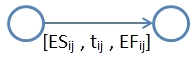
**Paso 1**: Se calcula el tiempo de iniciación de actividad, es decir, el tiempo en el que una actividad puede iniciar lo más pronto posible:

ESij = Max {EFki}

**Paso 2:** Se calcula el tiempo de terminación de una actividad, es decir, el tiempo en el que una actividad puede terminar lo más pronto posible:

EFij = ESij + tij

Se obtendrá:



**Dónde:**

ESij es el tiempo más próximo de iniciación.

EFij es el tiempo más próximo de terminación.

La duración del proyecto es:

Max {EFit}

**Método de revisión hacia atrás:**

El método de Ruta Crítica con revisión hacia atrás trabaja del nodo terminal hacia el nodo inicial. Determina las actividades críticas y tiempos de holgura, así como también el tiempo más lejano de iniciación y de terminación. Se trabaja con lo siguiente:

**Paso 1:** Se calcula el tiempo más lejano de iniciación, es decir, el mayor tiempo que toma una actividad para iniciar sin modificar el tiempo de terminación del proyecto.

LSij = LFij - tij

**Paso 2:** Se calcula el tiempo más lejano de terminación, es decir, el tiempo que toma la terminación de un proyecto sin modificar su terminación total.

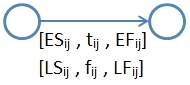
LFij = Min {LSjk}

**Paso 3:** Se calcula el tiempo de holgura, es decir, la longitud de tiempo en la que puede retrasarse una actividad sin causar ninguna modificación en la duración programada del proyecto en general.

fij = LSij - ESij

fij = LFij - EFij

Se obtendrá:



Dónde:

LSij es el tiempo más lejano de iniciación.

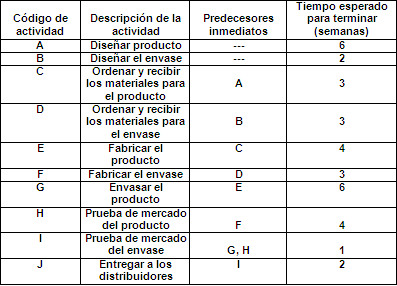
LFij es el tiempo más lejano de terminación.

Las actividades iniciales tienen:

ESij = 0

**Procedimiento para realizar el método de revisión hacia adelante.**

Utilizaremos como ejemplo la red Hydra Company.



Elaborando la red se tiene:

* El procedimiento normal para analizar una red consiste en comenzar en el nodo inicial y suponer que se tiene un tiempo inicial de cero.
* Se supone que todas las actividades comienzan tan pronto como es posible, es decir, tan pronto como han terminado todas las actividades precedentes asociadas.
* Como en nuestro ejemplo las actividades **A** y **B** no tiene predecesoras, **ES12 = 0 y ES15 = 0**; por lo tanto, sus correspondientes tiempos de terminación son **EF15 = 0 + 2 = 2** y **EF12 = 0 + 6 = 6.**
* Una vez calculado el tiempo próximo de terminación para la actividad **A**, puede calcularse el tiempo próximo de iniciación de la actividad **C**; la actividad **C** no puede comenzar sino hasta que la actividad **A** ha sido terminada. Ídem para la actividad **D**.
* El tiempo más próximo de iniciación de la actividad **C**, **ES23**, es igual al tiempo más próximo de terminación de la actividad **A**, que es **EF12 = 6**.
* El tiempo más próximo de terminación para la actividad **C** es su tiempo próximo de iniciación más su tiempo de duración, o **EF23 = ES23 + D23 = 6 + 3 = 9**.
* Para la actividad **D** los tiempos próximos de iniciación y de terminación son **ES56 = EF15 = 2**
* **EF56 = ES56 + D56 = 2 + 3 =5**

**Procedimiento para realizar el método de revisión hacia atrás.**

En nuestro caso **Hydra Company.**

* Para comenzar los cálculos, se comienza con el evento final (el nodo **10** en nuestro caso) y se fija el tiempo más lejano de terminación para la última actividad como el tiempo total de duración calculado en la revisión hacia adelante, **LF9 10 = 22**.
* Debido a que se requieren dos días para terminar la actividad **J**, el tiempo más lejano de iniciación para la actividad **J** es igual al tiempo más lejano de terminación menos el tiempo de duración

**LS9 10 = LF9 10 – D9 10**

**LS9 10 = 22 – 2 = 20**

* Para la actividad **I**, el tiempo más lejano de terminación es **20**, **LF89 = 20** y el tiempo más lejano de iniciación es

**LS89 = LF89 – D89**

**LS89 = 20 – 1 = 19**

Continuando con el análisis:

* Si un nodo determinado tiene más de una actividad que sale de él, entonces el tiempo más lejano de terminación para cada actividad que entra al nodo es igual al menor valor de los tiempos más lejanos de iniciación para todas las actividades que salen del nodo.

**Tiempo de holgura.**

Después de que se han determinado los límites de tiempo para toda la red, puede determinarse el tiempo de holgura para cada actividad.

Se define como tiempo de holgura como la longitud de tiempo en la que puede demorarse una actividad sin ocasionar que la duración del proyecto general exceda su tiempo programado de terminación.

La cantidad de tiempo de holgura de una actividad se calcula tomando la diferencia entre sus tiempos más lejanos de iniciación y más próximos de iniciación, o entre su tiempo más lejano de terminación y el tiempo más próximo de terminación.

En forma de ecuación:

**Fij = LSij – Esij**

**O**

**Fij = LFij – EFij**

Ejemplo

Para la actividad **B**

**F15 = LF15 – EF15 = 9 – 2 = 7**

* **F15 = LS15 – ES15 = 7 – 0 = 7**

**Procedimiento para determinar la Ruta Crítica.**

Un procedimiento eficiente consiste en calcular límites de tiempo para cada actividad (tiempos próximos de iniciación, próximos de terminación, lejanos de iniciación y lejanos de terminación) y a partir de estos datos determinar la ruta crítica.

Los límites de los tiempos próximo de iniciación y próximo de terminación pueden calcularse haciendo la revisión hacia delante de la red; los tiempos lejanos de iniciación y lejanos de terminación se determinan utilizando una revisión hacia atrás.

Analicemos el caso de **Hydra Company.**

Las actividades **A, C, E, G, I** y **J** forman una ruta que conecta los nodos **1, 2, 3, 4, 8, 9** y **10** de la red.

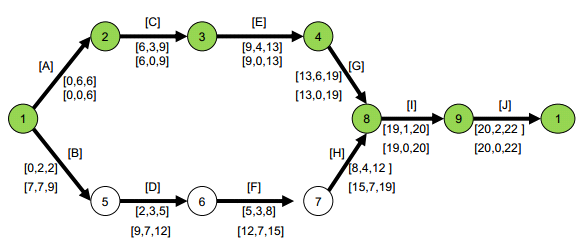
Las actividades **B, D, F, H, I** y **J**, forman una ruta que conecta los nodos **1, 5, 6, 7, 8, 9** y **10** de la red.

Puesto que la terminación de un proyecto requiere que se terminen todas las rutas de la red, la duración de la ruta más larga de la red es la ruta crítica.

Para el caso de **Hydra Company:**

La ruta **ACEGIJ** requiere **22** semanas (RUTA CRITICA)

La ruta **BDFHIJ** requiere **15** semanas.



Las líneas con holgura cero forman el camino crítico.

**Resumen de los cálculos.**

* Identificar todas las tareas o actividades asociadas con el proyecto.
* Identificar las relaciones de precedencias inmediatas para todas las actividades.
* Dibujar la red básica para el proyecto, mostrando todas las relaciones de precedencia.
* Estimar el tiempo esperado de duración para cada actividad.
* Empleando una revisión hacia adelante de la red, calcular el tiempo próximo de iniciación y el tiempo próximo de terminación para cada actividad.
* Utilizando el término esperado de terminación del proyecto, calculado en la revisión hacia adelante en la red, usar el procedimiento de revisión hacia atrás para calcular el tiempo más lejano de iniciación y el tiempo más lejano de terminación para cada actividad.
* Calcular el tiempo de holgura asociado a cada actividad.
* Identificar la ruta crítica para la red. Las actividades críticas son las que tienen un tiempo holgura de cero.

(ti, t, td) “revisión hacia delante”

[tf, th, ti] “revisión hacia atrás”

EJEMPLO # 1.

**Método de la Ruta Crítica (CPM)**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ACTIVIDADES | PREDECESOR | TIEMPO  (T) |
| A | - | 5 |
| B | - | 2 |
| C | A | 2 |
| D | A | 3 |
| E | B | 1 |
| F | C,D | 1 |
| G | E | 4 |

(8, 1, 9)

(8, 2, 7)

[6, 1, 8]

(0, 5, 5)

C(2)

[8, 0, 9]

[0, 0, 5]

F(1)

D(3)

A(5)

(8, 3, 8)

[5, 0, 8]

B(2)

9

(0, 2, 2)

[2, 2, 4]

(3, 4, 7)

G(4)

E(1)

(2, 1, 3)

[4, 2, 4]

[5, 2, 9]

Ruta critica

(8, 1, 9)

(8, 2, 7)

[6, 1, 8]

(0, 5, 5)

C (2)

[8, 0, 9]

[0, 0, 5]

F (1)

9

D(3)

A (5)

(8, 3, 8)

[5, 0, 8]

B (2)

(0, 2, 2)

[2, 2, 4]

(3, 4, 7)

G (4)

E (1)

(2, 1, 3)

[4, 2, 4]

[5, 2, 9]

Ruta crítica= A-D-F. =5+3+1=9

Tiempo de duración del proyecto= 9 semanas

Actividades no criticas = B-C-E-G.

Las actividades críticas son las que tienen un tiempo holgura igual a cero

EJEMPLO #2

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ACTIVIDADES | PREDECESOR | TIEMPO  (T) |
| A | - | 3 |
| B | - | 5 |
| C | B | 3 |
| D | A,C | 4 |
| E | D | 8 |
| F | C | 2 |
| G | F | 4 |
| H | F | 3 |
| I | B | 5 |
| J | G, H | 3 |
| K | F | 2 |

(12, 8, 20)

(8, 4, 12)

[12, 0, 20]

[8, 0, 12]

E (8)

D (4)

(0, 3, 3)

[5, 5, 8]

(10, 2, 12)

[18, 8, 20]

A (3)

20

K (2)

4)

(8, 2 ,10)

(0, 5, 5)

B (5)

[11, 3, 13]

[0,0, 5]

J (3)

G(4)

C(3)

(14, 3, 17)

(10, 4, 14)

F (2)

(5, 3, 8)

[13, 3, 17]

[17, 3, 20]

H(3)

[5, 0, 8]

[14, 4, 17]

(10, 3, 13)

(5, 5, 10)

0)

[15, 10, 20]

I (5)

Ruta critica

(12, 8, 20)

(8, 4, 12)

[12, 0, 20]

[8, 0, 12]

E (8)

D (4)

(0, 3, 3)

[5, 5, 8]

(10, 2, 12)

[18, 8, 20]

A (3)

20

K (2)

4)

(8, 2 ,10)

(0, 5, 5)

B (5)

[11, 3, 13]

[0,0, 5]

J (3)

G(4)

C(3)

(14, 3, 17)

(10, 4, 14)

F (2)

(5, 3, 8)

[13, 3, 17]

[17, 3, 20]

H (3)

[5, 0, 8]

[14, 4, 17]

(10, 3, 13)

(5, 5, 10)

0)

[15, 10, 20]

I (5)

RUTA CRITICA= B-C-D-E. = 5+3+4+8=20

TIEMPO DE DU7RACUON DEL PROYECTO=20 SEMANAS

ACTIVIDADES NO CRÍTICAS= A-F-I-G-H—K-J